2-7-4 凝固時間

Fourier의 열전도방정식 $dQ = -K \cdot A \cdot \dfrac{dT}{dx} \cdot dt$에 의하여 만일 $A=1$, $dt=1$이라면

$$dQ = -K \cdot \frac{dT}{dx} \; [=J] \qquad (\mathrm{I}-36)$$

이다.

단, dQ : 열유동량(Btu), J : 열유동율(Btu/hr·ft²)

dx : 벽두께(ft), dT : 온도차(°F)

dt : 시간(hr), K : 열전도율(Btu·ft/°F·hr·ft²)

Fig. I-106과 같은 주형면 온도가 주탕했을 때 순간적으로 T_0에서 T_1으로 상승하여 응고기간 중 그 온도를 유지한다고 가정하자. t시간 후 주형면에서 x인 점의 온도 T는 Bishop, Brandt, Pellini 등에 의하여 다음과 같이 표시되고 있다.

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\left(1 - \mathrm{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha \cdot t}}\right)^{*} \qquad (\mathrm{I}-37)$$

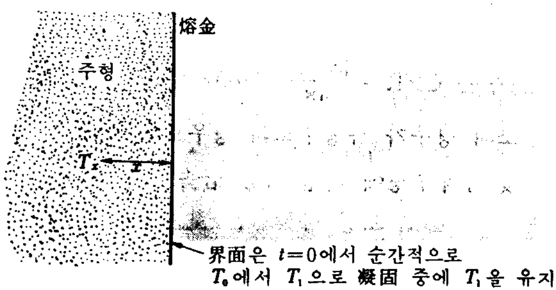

Fig. I-106 砂型에서의 열전도

오차함수(error function) $\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}\cdots\right)$ (I－38)

식 (I－37)로부터

$$\frac{dT}{dx}=\frac{d}{dx}\left[T_0+(T_1-T_0)\left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dx}[T_0+(T_1-T_0)]-(T_1-T_0)\cdot\frac{d}{dx}\left(\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}\right)$$

$$=-(T_1-T_0)\cdot\frac{d}{dx}\left(\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}\right)$$

그런데 $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}\right)\fallingdotseq\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}\right)^3\right\}\right]$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}-\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}\right)^3\cdot x^2\right]$$

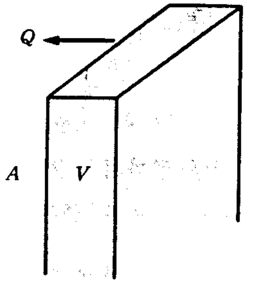

Fig. I－107

주형면에서의 熱기울기 $\frac{dT}{dx}$는 $x=0$일 때이므로

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\alpha\cdot t}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot\alpha\cdot t}}$$

$$\therefore\ \frac{dT}{dx}=-\frac{(T_1-T_0)}{\sqrt{\pi\cdot\alpha\cdot t}}\qquad\text{(I－39)}$$

∴ 식 (I－36)과 식 (I－39)에 의하여

$$J=\frac{K(T_1-T_0)}{\sqrt{\pi\cdot\alpha\cdot t}}\qquad\text{(I－40)}$$

면적 A를 통하여 시간 $t=0$에서 $t=t$까지의 열량 Q는

$$Q=A\int_{t=0}^{t=t}J\cdot dt=A\frac{2K(T_1-T_0)\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\alpha}}\qquad\text{(I－41)}$$

放熱될 면이 큰 板을 A라 하고 응고시간 t_s를 구해 본다.

열량 Q는

$$Q=\text{熔解潜熱}+\text{感熱}$$

$$=\rho_{\text{metal}}\cdot V\cdot L_{\text{metal}}+\rho_{\text{metal}}\cdot V\cdot C_{\text{metal}}(T_p-T_1)$$

$$=\rho_{\text{metal}}\cdot V[L_{\text{metal}}+C_{\text{metal}}(T_p-T_1)]\qquad\text{(I－42)}$$

단, T_p : 주입온도, T_1 : 주형면온도,
C_{metal} : 용금의 비열 L_{metal} : 용해잠열(Btu/lb),
V : 판용적, ρ_{metal} : 금속의 밀도

식 (I－41)과 식 (I－42)를 등치시키고, $t=t_s$로 놓으면

$$\frac{V}{A}=\frac{2K_{\text{mold}}(T_1-T_0)\sqrt{t_s}}{\rho_{\text{metal}}\sqrt{\pi\alpha_{\text{mold}}}[L_{\text{metal}}+C_{\text{metal}}(T_p-T_1)]}\qquad\text{(I－43)}$$

$$\left\{\frac{\rho_{metal}\sqrt{\pi\alpha_{mold}}\left[L_{metal}+C_{metal}\left(T_p-T_1\right)\right]}{2K_{mold}\left(T_1-T_0\right)}\right\}^2=B \text{로 놓으면}$$

$$t_s=B\left(\frac{V}{A}\right)^2 \qquad (\text{I}-44)$$

식 (Ⅰ-44)는 응고시간이 $\left(\frac{\text{용적}}{\text{표면적}}\right)^2$에 비례함을 표시하며, B를 주형 상수(mold constant)라 한다.

이상의 관계에서 거리 S까지 응고하는 데 요하는 시간을 구할 수 있다.

예를 들면 용적의 $\frac{1}{2}$을 응고하는 데 요하는 시간은

$$\frac{V}{2}\cdot\rho_{metal}\left[L_{metal}+C_{metal}\left(T_p-T_1\right)\right]=Q' \qquad (\text{I}-45)$$

中心部까지의 거리를 l이라 하면 $\frac{V}{2}=A\cdot l$이 된다. 또 표면적 A를 통하여 방열되는 열량 Q'는

식 (Ⅰ-41)에 의하여

$$Q'=A\frac{2K(T_1-T_0)\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\cdot\alpha}} \qquad (\text{I}-46)$$

식 (Ⅰ-45)와 식 (Ⅰ-46)에서

$$t=\left\{\frac{\rho_{metal}\sqrt{\pi\alpha_{mold}}\left[L_{metal}+C_{metal}\left(T_p-T_1\right)\right]}{2K_{mold}\left(T_1-T_0\right)}\right\}^2\cdot l_2=B\cdot l_2 \qquad (\text{I}-47)$$

응고두께는 경과 시간의 平方根에 비례하는 것도 식 (Ⅰ-47)에서 알 수 있다.